

0 724933-1

На правах рукописи

Яровикова Ирина Валерьевна

**ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ  
МНОГОМЕРНОЙ ДИФФУЗИИ**

Специальность: 05.13.18 – математическое моделирование, численные  
методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

**НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА  
КФУ**



Ульяновск - 2001

Работа выполнена в Ульяновском государственном университете

**Научный руководитель**

доктор физико-математических наук, профессор, действительный  
член РАЕН Учайкин В. В.

**Официальные оппоненты**

доктор физико-математических наук, профессор Шипатов Э.Т.

доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник  
Роганова Т.М.

**Ведущая организация**

Государственный научный центр РФ НИИАР, г. Димитровград

Защита состоится «26» декабря 2001 г. в 10 час. 00 мин. на заседании  
диссертационного совета К 212.278.02 по защите кандидатских диссертаций  
в Ульяновском государственном университете - в корпусе на Набережной  
р.Свияги, ауд. 703

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке университета

Автореферат разослан «22» ноября 2001 г.

Отзывы на автореферат просим присылать по адресу:

432700, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42, УлГУ, научная часть.

Ученый секретарь

диссертационного совета, к.ф.- м.н., доцент



Веревкин А.Б.

**Актуальность темы**

Наличие неоднородностей в различных средах (например, магнитных островов в плазме<sup>1</sup>, скоплений и туманностей в межзвездном пространстве<sup>2</sup> и т.п.), приводит к возникновению так называемых структур фрактального типа (к ним относятся также пористые материалы, аморфные полимеры, турбулентные потоки, шероховатые поверхности и др.)<sup>3</sup>. Диффузионные процессы в подобных средах носят название аномальных и интенсивно изучаются в последние годы. В связи с этим наблюдается возрастающий интерес к различным математическим моделям<sup>4</sup>, способным описать основные особенности этих процессов в статистическом смысле с использованием минимума информации о физических процессах, подобно тому, как диффузионное уравнение описывает процесс с помощью единственного параметра – коэффициента диффузии.

Обобщение обычного диффузионного уравнения на случай аномальной диффузии осуществляется путем превращения его в уравнение в дробных производных, при этом рассматривается асимптотическое ( $t \rightarrow \infty$ ) поведение скачкообразного ступенчатого процесса с изотропным распределением вектора мгновенного перескока (в зарубежной литературе этот процесс обозначается аббревиатурой CTRW - Continuous Time Random Walk<sup>5</sup>). Общим для всех режимов, описываемых таким уравнением, является нефизическое поведение в области малых времен, отмечавшееся в свое время еще Эйнштейном: частица, находившаяся в начале координат в начальный момент времени  $t = 0$ , в сколь угодно близкий к нему момент  $t > 0$  может быть обнаружена сколь угодно далеко от начала координат.

Более "физической" и более богатой по содержанию является модель, в которой CTRW-процесс заменен процессом случайного блуждания частицы с конечной (и постоянной) скоростью  $v$ . Эта *кинетическая* модель свободна от указанного выше дефекта: в любой момент времени  $t$  частица не может быть обнаружена за пределами  $N$ - мерного шара радиуса  $vt$ . При надлежащем (показательном) выборе распределений случайных величин свободных пробегов частицы  $\xi$  и времен ее пребывания в ловушках  $\tau$  она включает в себя односкоростную модель переноса нейтронов с учетом запаздывающих нейтронов, а после выключения ловушек ( $\tau = 0$ ) приводит к стандартной односкоростной модели переноса<sup>6</sup>. Стационарные версии этих

<sup>1</sup> G. M. Zaslavsky, M. Edelman, H. Weitzner, B. Carreras // Phys. of Plasmas, 2000, v. 7, p. 3691-3697.

<sup>2</sup> T. A. Lozinskaya. Supernova and star wind: interactions with galactic gas. M.: Nauka, 1986, A. A. Rusmaikin, D. D. Sokolov, A. M. Shukurov. Magnetic fields of Galaxies. Kluwer, Dordrecht, 1988.

<sup>3</sup> В. В. Зосимов, Л. М. Дячнев. // УФН, 1995, т. 165, № 4, с. 361-401; А. И. Олемской, А. Л. Флат. // УФН, 1994, т. 163, № 12, с. 1-50; В. С. Иванова, А. С. Балакиин, И. Ж. Буин, А. А. Оксогов. Синергетика и фракталы в материальном движении. М.: Наука, 1994.

<sup>4</sup> J.-P. Bouchaud, A. Georges. // Phys. Rep., 1990, v. 195, p. 127-293; M. B. Isichenko. // Rev. Mod. Phys., 1992, v. 64, p. 961-1043; R. Metzler, J. Klafter // Phys. Rep., 2000, v. 339, p. 1-77; V. V. Uchaikin, V. M. Zolotarev. // Chance and Stability: Stable Distribution and their Applications. VSP, Utrecht, 1999.

<sup>5</sup> J. Klafter, A. Blumen, M. F. Schlesinger. // Phys. Rev. A, 1987, v. 35, p. 3061-3078.

<sup>6</sup> Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972; Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1962; Г. И. Марчук. Методы расчета ядерных реакторов. М.: Госатомиздат, 1961.

двух моделей широко используются в теории ядерных реакторов. При степенном характере распределений  $\xi$  и  $\tau$  эта модель асимптотически (при  $t \rightarrow \infty$ ) выходит на *аномальный диффузионный режим*.

В настоящее время для кинетической модели известны лишь качественные результаты, относящиеся к асимптотическому поведению ширины диффузионного пакета, определяемой средним квадратом координаты<sup>7</sup>. Ни высших моментов, ни, тем более, самих распределений в задачах аномальной кинетики с конечной скоростью не найдено.

**Целью диссертационной работы** является вычисление высших пространственных нестационарных моментов плотностей распределений и исследование с их помощью пространственных распределений в кинетических моделях многомерной диффузии.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- Вычислить нестационарные пространственные моменты высших порядков в пространстве произвольной размерности;
- Разработать алгоритм восстановления по известным моментам пространственных распределений в различных временных диапазонах: баллистических - при малых временах, преддиффузионных и диффузионных - при больших;
- Исследовать пространственные распределения в режимах нормальной диффузии, супердиффузии и субдиффузии, выявить эффект влияния конечной скорости свободного движения частицы между столкновениями.

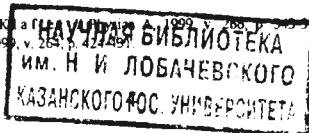
**Научная новизна** полученных автором результатов:

1. Впервые найдены общие выражения для трансформант Лапласа всех моментов в многомерной аномальной кинетике с произвольными независимыми законами распределения свободных пробегов частицы  $p(\xi)$  и времен пребывания в ловушках  $q(\tau)$ .
2. Установлено влияние эффекта конечной скорости свободного движения на форму диффузионного пакета в зависимости от режима диффузии.
3. Впервые установлено свойство, названное скользящим скейлингом: учет времени в коэффициенте диффузии позволяет существенно расширить область применимости предельных распределений.

**Практическая значимость**

1. Разработанная в математическом пакете Maple V Release 4 программа позволяет моделировать процессы переноса как в однородных, так и в неоднородных средах с различными заданными характеристиками.

<sup>7</sup> R. Metzler, E. Barkai, J. Klafter, *Phys. Rev. E* 62, 056117 (2000); A. Vazquez, O. Stenflo, C. Costa, F. Brouers // *Physica A*, 1999, v. 265, p. 1-10.



2. Найденные в работе распределения могут быть использованы для феноменологического описания диффузии в пористых средах, распространения космических лучей в Галактике, решения некоторых задач физики плазмы и т.п.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Точные выражения для трансформант Лапласа нестационарных пространственных моментов обобщенной теории переноса.

2. Наличие конечной скорости  $v$  свободного движения частицы уменьшает число возможных (при  $v = \infty$ ) диффузионных режимов с пяти до четырех с изменением их областей на диаграмме в плоскости параметров  $\alpha\beta$ .

3. Учет влияния конечной скорости в случае нормальной диффузионной асимптотики приводит к уменьшению коэффициента диффузии при сохраняющейся форме распределения.

4. В случае субдиффузии эффект конечной скорости не влияет на форму асимптотического распределения частиц: при больших временах не имеет значения с какой - конечной или бесконечной - скоростью движутся частицы в промежутках между пребыванием в ловушках. Само распределение описывается дробно-устойчивым распределением.

5. В случае супердиффузии ( $\alpha > 1$ ) конечная скорость замедляет расширение диффузионного пакета частиц, однако форма распределения по-прежнему описывается устойчивым законом. При  $\alpha < 1$  ситуация противоположная: кинематическое ограничение становится доминирующим фактором в формировании асимптотического распределения, имеющего совершенно иной вид, чем в случае  $\alpha > 1$ .

6. Свойство скользящего скейлинга диффузионных процессов существенно расширяет область применимости предельных распределений.

### **Апробация работы**

Результаты, полученные в диссертации, докладывались на 22-ом Европейском симпозиуме по статистике и 7-ой международной конференции по теории вероятностей и математической статистике (Вильнюс-98), на Всероссийской конференции «Математическое моделирование физических, экономических, социальных систем и процессов» (Ульяновск-98), на 7-ой международной конференции по фундаментальным наукам «Ломоносов-2000» (Москва-2000), на Международном симпозиуме «Chaotic Transport and Complexity» (Марсель-2000), на 12-ом международном семинаре по теоретической и математической физике (Казань-2000), 2-ом Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Самара-2001), а также на ежегодных конференциях студентов и аспирантов Ульяновского государственного университета (1997-2000 гг.), на семинарах ИТФ и кафедры теоретической и математической физики физико-технического факультета УлГУ.

**Личный вклад автора** в получение результатов, изложенных в диссертации: исходные теоретические положения разработаны совместно с профессором В. В. Учайкиным. Вывод аналитических выражений для трансформант Лапласа моментов, проведение конкретных расчетов, численное моделирование и анализ его результатов выполнены автором самостоятельно. Приводимые для сравнения результаты статистического моделирования получены В. В. Саенко.

### **Достоверность результатов**

Представленные в диссертации результаты доказаны с использованием аналитических методов теории преобразования Лапласа, асимптотического анализа и теории вероятностей. Достоверность подтверждается также согласием с результатами одномерной теории и независимым статистическим моделированием методом Монте-Карло.

### **Публикации**

По материалам диссертации опубликовано 10 печатных работ, в том числе 5 статей (из них 2 в центральной печати) и 5 тезисов докладов на международных научных конференциях. Список печатных работ приведен в конце автореферата.

### **Структура и объем диссертации**

Работа состоит из введения, четырех глав, двух приложений, заключения, 37 рисунков и трех таблиц, содержит 108 страниц текста, включая оглавление и список литературы из 110 наименований.

## **КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Во Введении** обосновывается актуальность работы, формулируются цели и задачи диссертации.

**В главе 1** дается общее описание модели.

**Раздел 1.1** посвящен постановке задачи. Частица может находиться в одном из двух состояний, отмечаемых индексами 0 (покой) и 1 (движение). Длительность пребывания  $\tau$  в состоянии 0 случайна и имеет плотность распределения  $q(t)$ ,  $t \geq 0$ . Время пребывания в состоянии 1 определяется скоростью частицы  $v = \text{const}$  и случайной величиной ее пробега  $\xi$  с плотностью распределения  $p(r)$ ,  $r \geq 0$ .

История частицы начинается в момент времени  $t = 0$ , когда частица, находясь в начале координат, совершает переход  $0 \rightarrow 1$  с вероятностью  $\varepsilon$ , или  $1 \rightarrow 0$  с вероятностью  $\varepsilon_0$ . После перехода  $0 \rightarrow 1$  частица движется по прямой в случайном направлении, распределение которого изотропно. Случайный пробег  $\xi$  частицы заканчивается переходом  $1 \rightarrow 0$ , в результате которого частица попадает в ловушку и находится в этой точке случайное время  $\tau$ , заканчивающееся переходом  $0 \rightarrow 1$ . Далее история частицы продолжается по тем же законам. Аналогично строится траектория и в случае, когда история начинается с перехода  $1 \rightarrow 0$ . Задача состоит в

определении пространственного распределения вероятности нахождения частицы при больших временах  $t$ .

В разделе 1.2 с помощью преобразования Фурье-Лапласа по пространственным переменным и по времени найдено точное выражение для трансформанты Лапласа плотности распределения частиц с учетом конечной скорости свободного движения. Показано, что в некоторых частных случаях решение совпадает с результатами, полученными ранее другими авторами.

В разделе 1.3 исследована область баллистического режима, когда основную роль играют частицы прямого потока, движущиеся от источника равномерно и прямолинейно. Моменты распределения  $x$ -координаты такой частицы, начинающей движение в момент времени  $t = 0$  (то есть, с перехода  $0 \rightarrow 1$ ) вычислены в явном виде:

$$\mu^{01(2k)} = \int_{-vt}^{vt} \rho^{01}(x, t) x^{2k} dx = \frac{\Gamma(N/2) \Gamma(k+1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(k+N/2)} P(vt) (vt)^{2k},$$

и найдено выражение для плотности

$$\rho_N^{01}(x, t) = \frac{\Gamma(N/2) P(vt)}{\sqrt{\pi} vt \Gamma((N-1)/2)} \left[ 1 - \left( \frac{x}{vt} \right)^2 \right]^{(N-3)/2}, \quad |x| \leq vt.$$

Отмечена эволюция этого распределения по мере увеличения размерности пространства  $N$ : от концентрации вероятностей в двух точках оси при  $N = 1$  к кривой колоколообразного типа при  $N \geq 4$ . При  $N = 2$  распределение имеет интегрируемые особенности на границах и минимум в центре (кривая плотности выпукла вниз), при  $N = 3$  имеем равномерное на  $[-vt; vt]$  распределение, при  $N \geq 4$  кривые плотности выпуклы вверх и с ростом  $N$  приближаются (по форме) к диффузионным.

Соответствующие результаты получены также и для  $\rho_N^{10}(x, t)$ , когда история частицы начинается с ее попадания в ловушку (то есть, с перехода  $1 \rightarrow 0$ ).

В частности, для степенных распределений  $P(x) \propto x^{-\alpha}$  и  $q(t) \propto t^{-\beta-1}$  найдено выражение  $\rho^{10}(x, t) \propto x^{-\alpha} (t - x/v)^{-\beta-1}$  для плотности распределения. Показано, что оно имеет острый максимум в точке  $x = 0$ , формируемый зависящим от характеристики пробега  $\alpha$  множителем  $x^{-\alpha}$ , и особенностями на краях баллистического интервала, формируемые множителем  $(t - x/v)^{-\beta-1}$ , зависящим от характеристики памяти  $\beta$ .

Глава 2 посвящена методу моментов.

В разделе 2.1 получено точное аналитическое решение задачи в терминах трансформант моментов произвольных четных (распределение симметрично относительно начала координат) порядков:

$$\tilde{\mu}^{(2n)}(\lambda) = \frac{(-1)^n g_{2n}(\lambda)}{1 - h_0(\lambda)} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(2n)!}{(2j)!} \sum_{l=1}^{n-j} \binom{l}{i_2 i_4 \dots i_{2n-2j}} h_2^{i_2}(\lambda) h_4^{i_4}(\lambda) \dots h_{2n-2j}^{i_{2n-2j}}(\lambda) g_{2j}(\lambda), \quad (1)$$

где

$$\binom{l}{i_2 i_4 \dots i_{2n}} = \frac{l!}{i_2! i_4! \dots i_{2n}!} - \text{полиномиальный коэффициент}$$

и введены обозначения

$$g_{2j}(\lambda) = \frac{\pi^{N/2}(-1)^j(2j)!}{j!\Gamma(N/2-j)2^{2j+N/2-1}} \left\{ \frac{1-\tilde{q}(\lambda)}{\lambda} \tilde{p}_{2j,N-1}(\lambda/\nu) + \frac{1}{\nu} \frac{(2j+N-1)!}{(\lambda/\nu)^{2j+N}} \left[ 1 - \sum_{l=0}^{2j+N-1} \frac{\tilde{p}_l(\lambda/\nu)}{l!(\lambda/\nu)^{-l}} \right] \right\},$$

$$h_{2j}(\lambda) = \frac{\tilde{q}(\lambda)\tilde{w}^{(2j)}(0, \lambda/\nu)}{(2j)!}.$$

В разделах 2.2. и 2.3 рассматривается метод стохастических соотношений. Показано, что в общем случае к результату (1) можно также прийти, рассматривая стохастическое соотношение для  $N$ -мерного случайного вектора  $R_{Nj}(t)$ , характеризующего смещение блуждающей частицы за время  $t$  (индекс  $i$  указывает на начальное состояние частицы:  $i=0$ , если она начинает свою историю с попадания в ловушку, и  $i=1$ , если с выхода из нее). В нормальном случае методом преобразования Лапласа получаем следующее рекуррентное соотношение:

$$\tilde{\mu}^{(2n)}(\lambda) = \frac{(2n)!v^{2n}}{(\mu\nu + \lambda)^{2n+1}} + \mu\nu \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2(n-k))!v^{2(n-k)}B_{n,k}}{\lambda(\mu\nu + \lambda)^{2(n-k)}} \tilde{\mu}^{(2k)}(\lambda), n > 1.$$

Сами моменты находятся обратным преобразованием

$$\mu^{(2n)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{-\lambda t} \tilde{\mu}^{(2n)}(\lambda) d\lambda.$$

Асимптотическое представление моментов при больших временах получено на основе тауберовой теоремы.

В разделе 2.4 рассматриваются некоторые частные случаи формулы (1). Показано, что подстановка соответствующего вида различных параметров приводит к уже известным результатам других авторов.

Раздел 2.5 посвящен описанию алгоритма восстановления плотности распределения методом полиномиальных разложений, при котором плотность распределения представляется в виде разложения по наиболее подходящей системе ортогональных с весовой функцией  $W(x)$  полиномов  $P_n(x)$ :

$$\rho(x, t) = W(x) \sum_{i=0}^{\infty} C_i(t) P_i(x),$$

а коэффициенты этого разложения определяются уже известными моментами:

$$\rho(x, t) = W(x) \sum_{i=0}^{\infty} P_i(x) H_i^{-1} \sum_{k=0}^i K_k(\nu t)^{-k-1} \mu^{(k)}(t), \quad x \in [-\nu; \nu],$$

где  $H_i = \int_a^b W(x) P_i^2(x) dx$  и  $P_i(x) = \sum_{k=0}^i K_k x^k$ .

Тестирование метода проведено на решении телеграфного уравнения, которое в одномерном случае представляет собой точное решение задачи нормальной диффузии<sup>8</sup>. Исходя из ожидаемой гауссовой формы распределения, восстановление проводится по моментам этого решения с помощью ортогональных при  $-\infty \leq x \leq \infty$  полиномов Эрмита  $H_m(x)$ :

<sup>8</sup> Учужкин В.В., Яровикова И.В., Сасенко В.В. // Ученые записки УдГУ. Сер. физическая. 1999, вып. 1(6), с.31-40



$$\psi_{\text{норм}}(x, t) = \frac{1}{\mu^{(2)}(t)} \exp \left\{ \frac{-x^2}{2\mu^{(2)}(t)} \right\} \sum_{i=0}^n F_i(t) H_i(x), \quad (2)$$

при этом коэффициенты имеют вид

$$F_i(t) = \frac{(\mu^{(2)}(t))^i}{\sqrt{2\pi n!}} \sum_{k=0}^{[i/2]} \frac{(-1)^k}{k!(i-2k)!} \mu^{(i-2k)}(t). \quad (3)$$

Тестирование показывает, что при временах, превышающих  $t = 100$ , относительная погрешность метода составляет менее 1%, причем максимальная абсолютная погрешность в любой момент времени достигается точке  $x = 0$ .

В главе 3 анализируется нормальная кинетика.

В разделе 3.1 обсуждаются физические и математические основы обыкновенной теории переноса, в основе которой лежит кинетическое уравнение Больцмана.

Раздел 3.2. посвящен нормальной физической кинетике в однородной стационарной среде, характеризуемой показательными распределениями

$$q(t) = (1/\bar{\tau}) \exp(-t/\bar{\tau}), \quad t > 0,$$

$$p(r) = (1/\bar{\xi}) \exp(-r/\bar{\xi}), \quad r > 0.$$

Поскольку при  $t \rightarrow \infty$  основной вклад в результат дают окрестности нуля фурье-лапласовских переменных  $k$  и  $\lambda$ , достаточно, чтобы среднее время пребывания в ловушке  $\bar{\tau}$  и средний квадрат пробега  $\bar{\xi}^2$  были конечными. При этих условиях

$$\bar{p}(\lambda) \sim 1 - \bar{\xi}^2 \lambda^2 / 2,$$

$$\bar{q}(\lambda) \sim 1 - \bar{\tau} \lambda, \quad \lambda \rightarrow 0,$$

и трансформанты моментов (1) принимают вид

$$\bar{\mu}^{(2n)}(\lambda) \sim \frac{2n! \Gamma(n+3/2) (4D)^n}{\sqrt{\pi} (2n+1)} \lambda^{n-1},$$

где

$$D = \frac{\bar{\xi}^2}{N(\bar{\xi} + v\bar{\tau})} \quad (4)$$

коэффициент диффузии одной из  $N$  координат рассматриваемой частицы.

Найденная в рамках рассматриваемой модели формула (4) для диффузионного коэффициента охватывает как случай обычного переноса в среде без ловушек ( $\bar{\tau} = 0$ )

$$D = \frac{v \bar{\xi}^2}{N \bar{\xi}},$$

так и другой предельный случай – мгновенных перескоков ( $v \rightarrow \infty$ )

$$D = \frac{\bar{\xi}^2}{N \bar{\tau}}.$$

Физический смысл последней формулы заключается в следующем: коэффициент диффузии равен среднему квадрату смещения  $x$ -координаты  $N$ - мерного вектора  $\bar{\xi}^2/N$  в одном перескоке, умноженному на среднее число перескоков в единицу времени, равное  $1/\bar{\tau}$ . При движении частицы со скоростью  $v$  среднее число перескоков в единицу времени уменьшается:

оно становится равным  $1/\bar{\tau}_v$ , где  $\bar{\tau}_v$  теперь среднее время между выходами частицы из ловушки:

$$\bar{\tau}_v = \bar{\tau} + \bar{\xi}/v. \quad (5)$$

Соответствующий этому случаю коэффициент диффузии получается делением  $\xi^2/N$  на величину (5), что и объясняет структуру выражения (4).

Таким образом, учет влияния конечной скорости приводит лишь к изменению (уменьшению) коэффициента диффузии, но сохраняет форму распределения.

В разделе 3.3 в отсутствие ловушек (то есть при  $q(r) = \delta(r)$ ) распределение пробегов полагается экспоненциальным,  $p(\xi) = \sigma e^{-\sigma\xi}$ ,  $\tilde{p}(\lambda) = \sigma/(\sigma + \lambda)$ , что приводит к моментам нестационарной задачи обычной теории переноса в трехмерном пространстве. В частности, для второго, четвертого и шестого моментов:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}^{(2)}(\lambda) &= \frac{2v^2}{\lambda^2(\sigma v + \lambda)}, \\ \tilde{\mu}^{(4)}(\lambda) &= \frac{8v^4(9\lambda + 5\sigma v)}{3\lambda^3(\sigma v + \lambda)^3}, \\ \tilde{\mu}^{(6)}(\lambda) &= \frac{16v^6(135\lambda^2 + 126\lambda\sigma v + 35\sigma^2 v^2)}{3\lambda^5(\sigma v + \lambda)^5}. \end{aligned} \quad (6)$$

Обратное преобразование выражений (6) выполняется методом вычетов:

$$\mu^{(2n)}(t) = \sigma^{-2n} \left\{ \sum_{k=0}^n a_{n,k} (\sigma v t)^k + e^{-\sigma v t} \sum_{k=0}^{2n-2} b_{n,k} (\sigma v t)^k \right\}. \quad (7)$$

Показано, что найденные точные моменты (7) при  $t \rightarrow \infty$  асимптотически эквивалентны моментам

$$m_{2n}^*(t) = \frac{2^{2n+1} \Gamma(3/2 + n)}{\sqrt{\pi}} (D t)^n.$$

решения диффузионного уравнения

$$\frac{\partial \rho_0^*(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 \rho_0^*(\mathbf{r}, t), \quad \rho_0^*(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r}), \quad D = \frac{v}{3\mu}.$$

На рис. 1 представлены отношения моментов  $\mu^{(2n)}(t)/m_{2n}^*(t)$  при  $v=1$ ,  $\sigma=1$ . Видно, что в области малых времен различие между сравниваемыми моментами велико (точные моменты всегда меньше диффузионных), но со временем оно уменьшается и для каждого момента  $\mu^{(2n)}(t)$  можно указать такое  $t_n$ , начиная с которого он сколь угодно мало отличается от своего диффузионного аналога  $m_{2n}^*(t)$ . Однако, по мере возрастания порядка момента  $2n$  соответствующее  $t_n$  возрастает. Установлена неравномерная сходимость точных моментов к диффузионным, следовательно диффузионное приближение не может служить аппроксимацией точного решения во всем пространстве.

В разделе 3.4 проведено восстановление распределения в области малых времен по полиномам Лежандра:

$$\rho_L^{(2n)}(x, t) = \sum_{i=0}^n C_i(t) P_i(x),$$

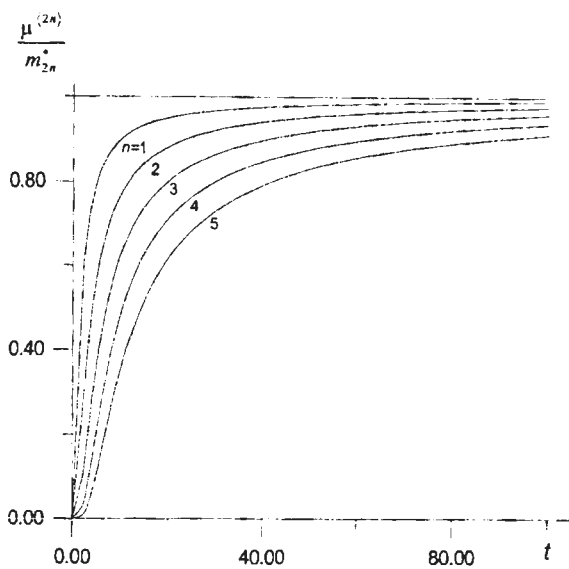


Рис.1. Отношение точных кинетических моментов к диффузионным.

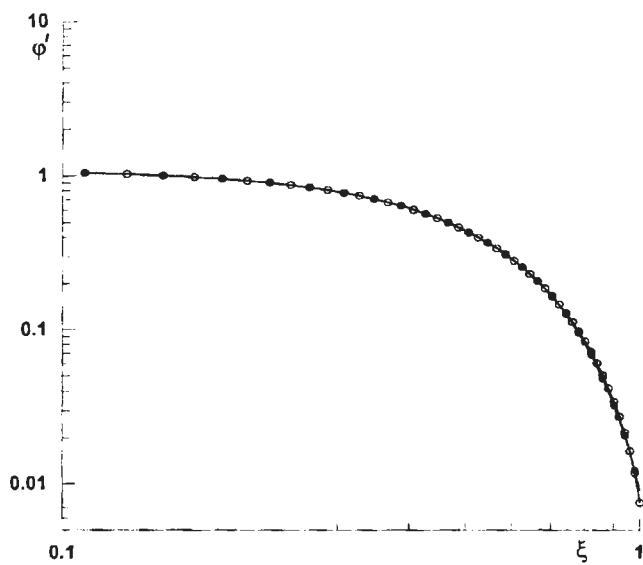


Рис. 2. Плотности  $\phi_L^{(10)}$  (○) и  $\phi_H^{(10)}$  (●) при  $t = 5$ .

где  $n$  - число используемых моментов, а коэффициенты разложения представляют собой линейные комбинации известных моментов  $\mu^{(2n)}(t)$ :

$$C_i(t) = \frac{2\pi vt}{2^{i-1}} \sum_{k=0}^{[i/2]} \frac{(-1)^k (2i-2k)!}{k!(i-k)!(i-2k)!} \mu^{(i-2k)}(t),$$

где  $[i/2]$  - целая часть частного  $i/2$ .

Как показано в разделе 3.3 в области больших времен выполняется соотношение

$$\mu^{(2n)}(t) \sim m_{2n}^*(t), \quad t \rightarrow \infty,$$

поэтому в данном случае плотность  $\rho_H^{(2n)}(x, t)$  восстанавливается по полиномам Эрмита и определяется выражениями (2), (3).

При фиксированном  $n$  и возрастающем времени  $t$  погрешность первого представления растёт, а второго - убывает, поэтому оценим максимальную погрешность результата путём сравнения восстановленных распределений при таком  $t=t^*$ , при котором они наиболее близки друг к другу. В качестве критерия близости распределений используем метрику Чебышева в пространстве непрерывных функций:

$$d(\rho_H^{(2n)}, \rho_L^{(2n)}) = \max_{x \in [-vt, vt]} \left| \rho_H^{(2n)}(x, t) - \rho_L^{(2n)}(x, t) \right|.$$

Вводя переменную  $\xi = x/t \in [-1; 1]$  и обозначая плотность ее распределения через  $\phi(\xi, t) = t \rho(\xi t, t)$ , определим расстояние формулой:

$$d(\phi_H^{(2n)}, \phi_L^{(2n)}) = \max_{\xi \in [-1; 1]} \left| \phi_H^{(2n)}(\xi, t) - \phi_L^{(2n)}(\xi, t) \right|.$$

Численные расчеты показали, что при использовании пяти первых четных моментов расстояние между распределениями  $\phi_L^{(10)}$  и  $\phi_H^{(10)}$  принимает наименьшее значение в окрестности точки  $t^* = 5$ . С уменьшением числа используемых полиномов  $t^*$  смещается в область меньших значений, а соответствующее расстояние быстро возрастает. При использовании пяти первых четных моментов это расстояние имеет порядок  $10^{-3}$ , что обеспечивает хорошее согласие самих распределений, восстановленных по разным системам полиномов (рис. 2).

В разделе 3.5 вводится понятие скользящего скейлинга

$$\rho(x, t) = \frac{1}{B(t)t^r} f\left(\frac{x}{B(t)t^r}\right),$$

включающее в себя как частный случай простой тип скейлинга

$$\rho(x, t) = \frac{1}{t^r} f\left(\frac{x}{t^r}\right),$$

которому удовлетворяют решения диффузионных (нормального и аномального) уравнений. Здесь  $B(t)$  - неотрицательная нестепенная функция.

Анализ распределений, полученных в настоящей работе с использованием метода моментов и подтвержденных независимыми расчетами методом Монте-Карло, позволяет утверждать, что они обладают свойством скользящего скейлинга: в асимптотическом режиме  $t \rightarrow \infty$  распределения  $\rho(x, t)$  выходят на простой (диффузионный) скейлинг, но в предасимптотической области они проявляют скользящий скейлинг с той же

самой предельной функцией. Введение скользящего скейлинга существенно расширяет аппроксимируемую область распределений. Так, в случае нормальной кинетики скользящий скейлинг наступает в два раза раньше, чем простой.

В разделе 3.6 проведен предасимптотический анализ моментов в случае диффузии с экспоненциальным распределением пробегов частицы ( $p(\xi) = \sigma e^{-\sigma \xi}$ ,  $\tilde{p}(\lambda) = \sigma / (\sigma + \lambda)$ ) в среде без ловушек ( $q(\tau) = \delta(\tau)$ ,  $\tilde{q}(\lambda) = 1$ ). Найдены предасимптотические члены в разложениях моментов, определен критический момент времени  $T^*$  выхода на свою асимптотику момента наибольшего порядка. Показано, что если рассматривать поведение плотности распределения в более ранние, чем  $T^*$ , моменты времени, то использование только главных асимптотических членов приведет к погрешности, во избежание этого необходимо добавлять в рассмотрение и соответствующие предасимптотические слагаемые. Установлено, чем больше скорость движения частицы, тем раньше наступает решающий момент  $T^*$ , что подтверждается рисунком 3. Аналогичная ситуация наблюдается и с ростом размерности пространства  $N$  (рис. 4).

В главе 4 рассмотрена аномальная кинетика

Раздел 4.1 посвящен анализу кинетической модели процесса супердиффузии, когда времена пребывания в ловушках имеют плотность вероятности показательного вида  $q(t) = (1/\bar{\tau}) \exp(-t/\bar{\tau})$ ,  $t > 0$ , с изображением Лапласа

$$\tilde{q}(\lambda) = \frac{1}{1 + \bar{\tau}\lambda}, \quad (8)$$

а распределение пробегов частиц  $p(r)$  характеризуется асимптотикой степенного вида (блуждание Леви)<sup>9</sup>  $p(r) \sim [\alpha A / \Gamma(2 - \alpha)] r^{-\alpha-1}$ ,  $r \rightarrow \infty$ , с бесконечным средним пробегом ( $0 < \alpha < 1$ ). Для  $\tilde{p}_n(\lambda)$  справедливо:

$$\tilde{p}_n(\lambda) \sim [(-1)^n \alpha (\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1) / \Gamma(1 - \alpha)] \lambda^{\alpha-n},$$

$$\tilde{S}_n(\lambda) = A \left[ \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{k!} \left( \prod_{m=1}^k (\alpha - m + 1) \right) + (2n+1)! \right].$$

С учетом этих выражений, а также формулы (8) главные члены изображений супердиффузионных пространственных моментов при  $\lambda \rightarrow 0$  находятся из (1) в виде

$$\tilde{\mu}^{(2n)}(\lambda) \sim M^{(2n)}(\alpha, \beta; A, B, C; \nu)(\lambda)^{-\gamma^{(2n)}-1}. \quad (9)$$

Обращение преобразования Лапласа для моментов согласно тауберовым теоремам приводит к выражениям

$$\mu^{(2n)}(t) \sim \frac{M^{(2n)}(\alpha, \beta; A, B, C; \nu)}{\Gamma(\gamma^{(2n)} + 1)} (vt)^{\gamma^{(2n)}}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (10)$$

при этом  $\gamma^{(2n)} = 2n$ , соответствующие коэффициенты  $M^{(2n)}(\alpha, \beta; A, B, C; \nu)$ , найденные для данного режима, приведены в Приложении 1.

<sup>9</sup> И. Л. Левин. Стохастические процессы и Броуновское движение. М. Наука. 1972.

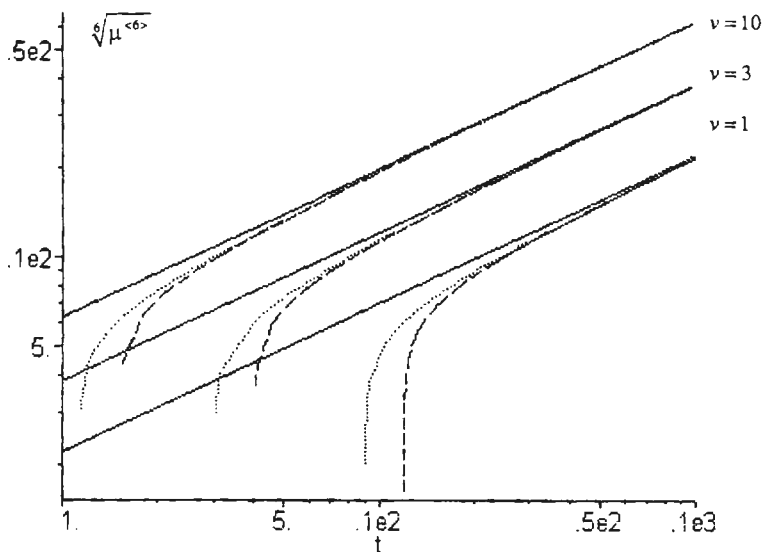


Рис. 3. Сходимость шестого момента к главным асимптотикам для различных скоростей движения частицы ( $N=1, \sigma=1$ )

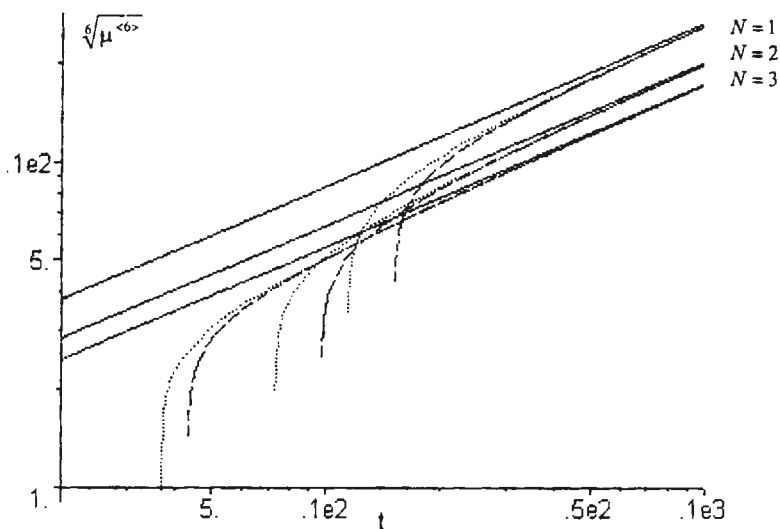


Рис. 4. Сходимость шестого момента к главным асимптотикам в пространствах различной размерности ( $\nu=1, \sigma=1$ )

Предасимптотический анализ момента шестого порядка (наибольшего из используемых) показывает, что его поведение при движении частицы с единичной скоростью в одномерном пространстве достаточно точно описывается главной асимптотикой (10) уже при  $t \geq T^* \approx 500$ . С увеличением скорости и размерности пространства этот момент наступает раньше.

Из выражения (10) видно, что при  $\alpha < 1$  распределение расплывается как в баллистическом режиме, и кинематическое ограничение становится преобладающим фактором в формировании асимптотического распределения. Зажатое условием  $|x| \leq vt$ , оно имеет совершенно иной вид, чем в случае  $\alpha > 1$ . Качественные соображения показывают, что вид этот подобен баллистическим распределениям, рассмотренным в п. 1.3. Исходя из ожидаемой формы распределения, выберем полиномы Чебышева 1-го рода  $T_n(x)$  с весовой функцией

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

для восстановления плотности пространственного распределения частиц. Плотность распределения представляется в виде

$$\rho(x, t) \sim \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{i=0}^3 K_i(t) T_i(x), \quad t > T^*$$

с коэффициентами:

$$K_i(t) = \frac{\pi v t}{2} \sum_{k=0}^{[i/2]} \frac{(-1)^k (i-k)! 2^{i-2k}}{k! (i-2k)!} \mu^{(i-2k)}(t)$$

Численный расчет подтверждается результатами моделирования методом Монте-Карло (рис. 5). Исследовано поведение плотности распределения при изменяющихся параметрах: скорости частиц, времени, размерности и фрактальности пространства.

Процесс диффузии в той же среде с ловушками показательного типа, но с конечным средним значением пробега (при  $\alpha \in (1, 2]$ ) рассмотрен в разделе 4.2. Подстановка соответствующих этому случаю асимптотик

$$\tilde{q}(\lambda) = \frac{1}{1 + \bar{\epsilon} \lambda}$$

$$\tilde{p}_0(\lambda) \sim 1 - \bar{\epsilon} \lambda + C \lambda^\alpha, \quad C = \frac{r_0^\alpha}{(\alpha - 1)}, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad \lambda \rightarrow 0$$

в (1) позволяет получить главные члены изображений супердиффузионных пространственных моментов при  $\lambda \rightarrow 0$  в виде, совпадающем с (9), но с другими коэффициентами  $M^{(2n)}(\alpha, \beta, A, B, C, v)$ . Обращение преобразования Лапласа для моментов, согласно тауберовой теореме, приводит к выражениям вида (10), где  $\gamma^{(2n)} = 2n + 1 - \alpha$ .

Из выражения для второго момента ( $n = 1$ ) видно, что в случае  $\alpha > 1$  при больших временах диффузионный пакет расширяется пропорционально  $t^{\frac{3-\alpha}{2}}$ , то есть медленнее баллистического пакета. Вследствие этого, кинематическое ограничение  $|x| \leq vt$  не оказывает влияния на форму распределения диффундирующих частиц при  $t \rightarrow \infty$ . Установлено, что учет замедления расширения диффузионного пакета частиц, движущихся с

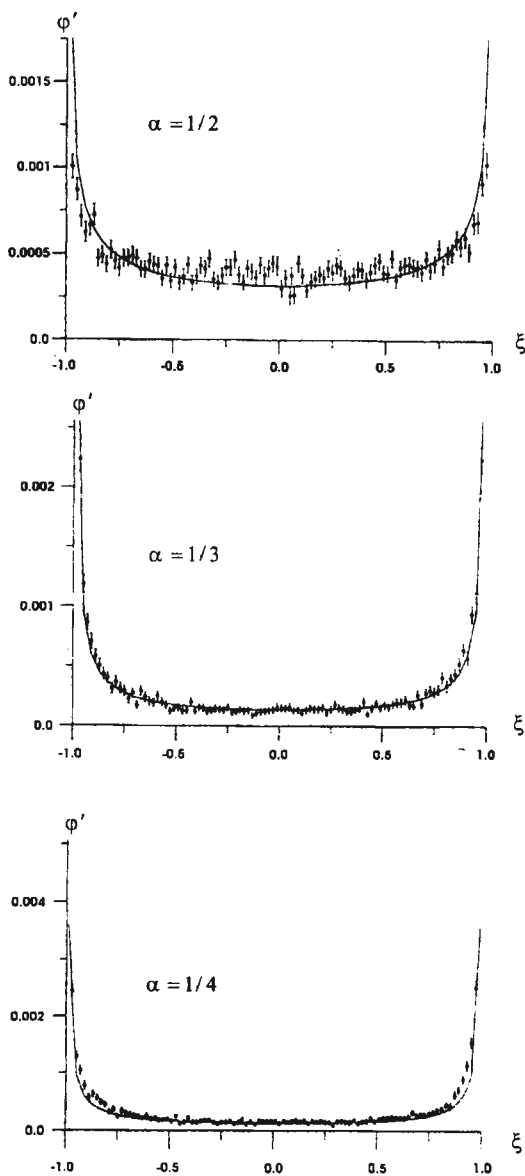


Рис. 5. Восстановленная асимптотическая плотность распределения  $\phi'(\xi, t) = \nu t \rho'(\nu t \xi, t)$  (сплошная кривая) в сравнении с результатами, полученными методом Монте-Карло (точки) при  $N=1$ ,  $\nu=10$ ,  $t=500$



конечной скоростью  $v$ , сводится к замене коэффициента диффузии в уравнении супердиффузии с дробным лапласианом, решения которого принадлежат классу строго устойчивых распределений<sup>10</sup>, а именно, - составляют подмножество симметричных распределений этого класса. Приведенные рассуждения позволяют использовать систему ортогональных полиномов Эрмита с весовой функцией, пропорциональной гауссовой плотности (формулы (2), (3)).

Показано, что эволюция супердиффузионного пакета с течением времени приводит к расплыванию плотности распределения. Тенденция к увеличению концентрации частиц в области начала координат с ростом параметра  $\alpha$  сохраняется в этом диапазоне значений, как и при  $\alpha < 1$ . При  $\alpha \rightarrow 2$  коэффициент эксцесса

$$\eta = \frac{\mu^{(4)}}{(\mu^{(2)})^2} - 3$$

стремится к нулю, т.е. распределение приближается к гауссовому и достигает его при  $\alpha = 2$ .

В разделе 4.3 рассматривается случай, когда распределение времен пребывания в ловушках имеет асимптотику степенного типа с показателем  $\beta < 1$ :

$$q(t) \sim \beta B / \Gamma(1 - \beta) t^{-\beta-1},$$

соответствующую anomalно большим временам пребывания частицы в ловушках ( $\bar{t} = \infty$ ). При этом распределение пробегов частиц считается показательным:  $p(r) = (1/\bar{\xi}) e^{-r/\bar{\xi}}$ ,  $r > 0$ . Как и во всех субдиффузионных случаях, в указанном частном режиме ширина диффузионного пакета растет со временем медленнее, чем при обычной диффузии (субдиффузия).

Подставляя изображения Лапласа плотностей  $p(r)$  и  $q(t)$

$$\tilde{q}(\lambda) \sim 1 - B\lambda^\beta, \quad \beta < 1, \quad \lambda \rightarrow 0,$$

$$\tilde{p}(\lambda) = \frac{1}{\lambda\bar{\xi} + 1},$$

в формулы для трансформант моментов (1), аналогично предыдущему находим асимптотические ( $t \rightarrow \infty$ ) моменты, при этом получаем  $\gamma^{(2n)} = \beta n$ . Эффект конечной скорости в случае субдиффузии не проявляется столь значительно, как в случае супердиффузии. Более того, асимптотики пространственных моментов вообще от скорости не зависят. То есть, в режиме субдиффузии при больших временах не имеет значения с какой - конечной или бесконечной - скоростью распространяются частицы.

Исследована эволюция распределения во времени. Выяснено, что распределение приближается к нормальному с ростом параметра  $\beta$  и достигает его при  $\beta = 1$ . С увеличением размерности пространства  $N$  моменты стремятся к некоторым своим предельным значениям, определяющим соответствующее предельное положение кривой плотности распределения (рис 6).

<sup>10</sup> Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. Мир. Москва. 1983., V. M. Zolotarev, in: Contributions to probability. Ed. By J. Gani and V.K Rohatgi. // Acad. Press. Inc (London), 1981. p. 283.

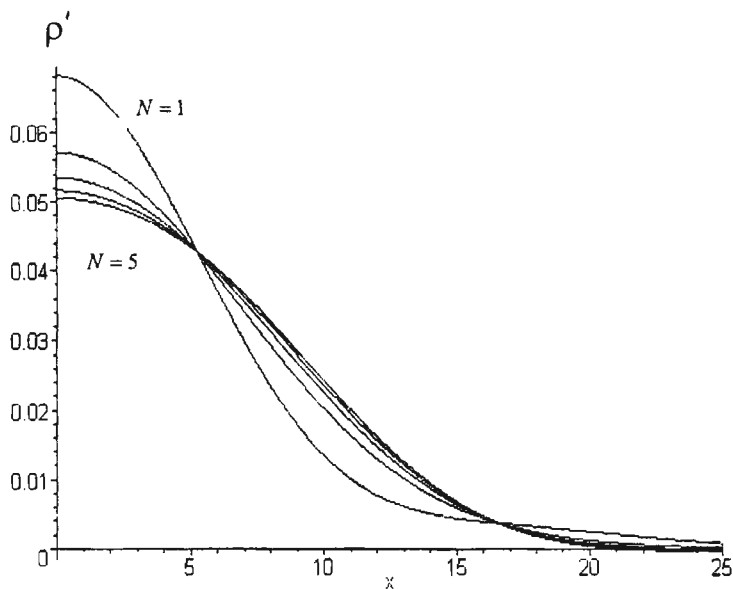


Рис 6. Эволюция субдиффузионной плотности распределения  $\rho(x, t)$  с увеличением размерности пространства ( $N = 1, 2, 3, 4, 5, \nu = 1, \beta = 1/2, t = 10^3$ )

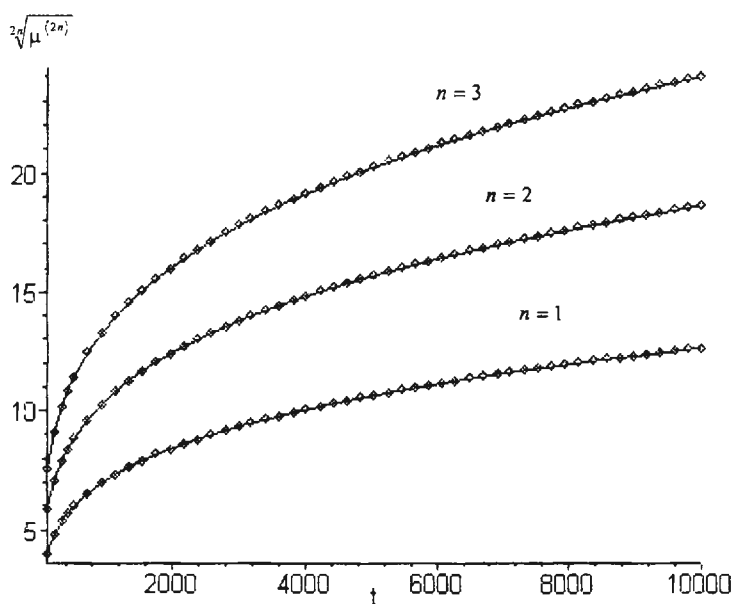


Рис. 7. Асимптотика больших времен аномальных кинетических моментов (сплошная линия) и моменты  $ADD_{q,n}$  (значки) при  $\beta = 1/2$ .

В работе В. В. Учайкина<sup>11</sup> асимптотическое решение  $N$ -мерной задачи аномальной диффузии найдено в терминах устойчивых распределений, обозначаемое аббревиатурой  $ADD$  (Anomalous Diffusion Distribution). Там же подробно исследованы их свойства и приведено выражение для моментов произвольного четного порядка:

$$\langle |X(t)|^{2n} \rangle = \frac{\Gamma(n + N/2) \Gamma(n+1)}{\Gamma(N/2) \Gamma(n\beta + 1)} (4Dt^\beta)^\alpha, \quad \alpha = 2, \quad 0 < \beta < 1,$$

соответствующих режиму аномальной кинетики с ловушками степенного типа. Совпадение указанных моментов с полученными автором диссертационной работы (рис. 7) свидетельствует и о совпадении самой плотности распределения с соответствующим распределением  $ADD$ .

В разделе 4.4 излагается применение развитой теории к режиму диффузии с пробегами  $\xi$  и временами пребывания в ловушках  $\tau$  распределенными по степенным законам.

В работах Монтролла и Вейсса<sup>12</sup>, а также К.В.Чукбара<sup>13</sup> показано, что при бесконечной скорости свободного движения частицы между столкновениями ширина диффузионного пакета при  $t \rightarrow \infty$  растет по закону  $t^\gamma$ ,  $\gamma = \beta/\alpha$ . При  $\beta/\alpha < 1/2$  имеет место субдиффузия (СД), при  $1/2 < \beta/\alpha < 1$  - супердиффузия (СПД), при  $\beta/\alpha > 1$  - режим, который можно назвать супербаллистическим (СБР): пакет расплывается в пространстве быстрее, чем в случае свободного движения частиц. Наглядное представление о расположении указанных областей дает рис. 8. На границе зон супердиффузии и субдиффузии, описываемой отрезком прямой  $\alpha = 2\beta$ , значение коэффициента  $\gamma$  соответствует нормальному диффузионному процессу, однако лишь точка  $B$  представляет нормальную диффузию (НД), все остальные точки отрезка  $OB$  представляют квазинормальную диффузию, когда закон расплывания пакета  $t^{1/2}$ , а форма пакета отличается от нормальной. По этим же соображениям используется термин *квазibalлистический* (КБР) для режима, изображаемого отрезком  $OC$ .

Обращение преобразования Лапласа для моментов в случае конечной скорости свободного движения приводит к выражениям вида (10) с показателем  $\gamma^{(2n)}$ , зависящим от соотношения между  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\gamma^{(2n)} = \begin{cases} 2n, & \alpha \leq \beta, \\ 2n - \alpha + \beta, & \alpha > \beta. \end{cases}$$

Тип диффузии определяется младшим показателем  $\gamma \equiv \gamma^{(2)}/2$ . Видно, что при  $\beta < \alpha < \beta + 1$  и любых  $\beta$  процесс представляет собой супердиффузию, при  $\alpha = \beta + 1$  - квазинормальный режим, при  $\alpha > \beta + 1$  - субдиффузию. Область супербаллистического режима исчезла, предельным режимом максимальной скорости расширения диффузионного пакета стал квазibalлистический режим (треугольник  $OCD$ , рис. 9).

<sup>11</sup> В. В. Учайкин // Int. Journ. of Theoretical Physics 2000, v. 39, N8, p. 2099-2117.

<sup>12</sup> E. W. Montroll, B. J. Weiss // in Fluctuation Phenomena, ed by E. W. Montroll, J. L. Lebowitz, Amsterdam. 1979 p. 61

<sup>13</sup> К. В. Чукбар // ЖЭТФ. 1995, т. 108, с. 1875-1884

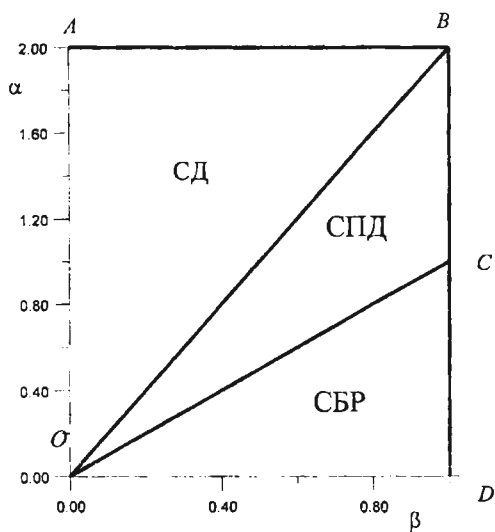


Рис. 8. Строение области аномальной диффузии в модели с бесконечной скоростью свободного движения частицы.

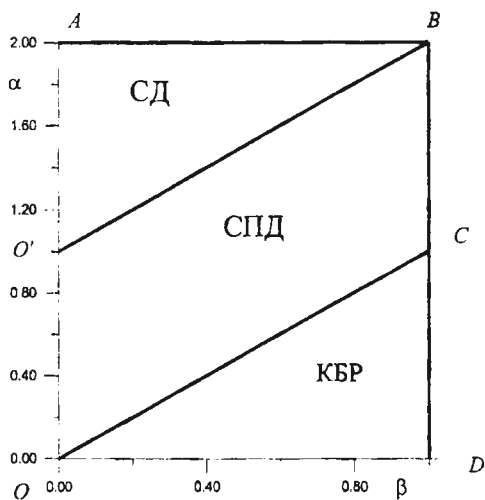


Рис. 9. Строение области аномальной диффузии в модели с конечной скоростью свободного движения частицы

Квазинормальная диффузия ( $\gamma=1/2$ ) изображается теперь отрезком прямой  $\alpha = \beta + 1$  вместо  $\alpha = 2\beta$ , как это имело место в случае с бесконечной скоростью. Из сопоставления рисунков 8 и 9 видно также, что квазинормальная диффузия с бесконечной скоростью возникает при тех значениях показателей  $\alpha$  и  $\beta$ , которые при конечной скорости приводят к супердиффузии. При  $0 < \beta < 0.5$  форма распределения частиц с конечной скоростью движения частицы принципиально отличается от формы распределения бесконечной скоростью частиц. При  $0.5 < \beta < 1$  ситуация иная, распределения в том и другом случае имеют одинаковую форму. Рисунки показывают также, что параметры  $\alpha$  и  $\beta$ , описывающие квазинормальную диффузию при  $v = \text{const}$ , приводят к субдиффузии в случае  $v = \infty$ . Часть субдиффузионной области, расположенная при  $v = \infty$  в треугольнике  $OO'B$  превращается в супердиффузионную при  $v < \infty$ .

В Приложении 1 приведены найденные выражения для коэффициентов в асимптотическом разложении моментов пространственно-временного распределения.

В Приложении 2 содержатся необходимые сведения о свойствах устойчивых распределений.

## ВЫВОДЫ

1. В отличие от второго момента, моменты высших порядков оказываются зависящими от размерности пространства. При каждом  $l$  существуют, однако, конечные предельные значения моментов проекции радиус-вектора на координатную ось.

2. Наличие конечной скорости  $v$  свободного движения частицы уменьшает число возможных (при  $v = \infty$ ) диффузионных режимов с пяти до четырех с изменением их областей на диаграмме в плоскости параметров  $\alpha\beta$ .

3. Учет влияния конечной скорости в случае нормальной диффузионной асимптотики приводит к уменьшению коэффициента диффузии при сохраняющейся форме распределения.

4. В случае субдиффузии эффект конечной скорости не влияет на форму асимптотического распределения частиц: при больших временах не имеет значения с какой - конечной или бесконечной - скоростью движутся частицы в промежутках между пребыванием в ловушках. Само распределение описывается дробно-устойчивым распределением.

5. В случае супердиффузии ( $\alpha > 1$ ) конечная скорость замедляет расширение диффузионного пакета частиц, однако форма распределения по-прежнему описывается устойчивым законом. При  $\alpha < 1$  ситуация противоположная: кинематическое ограничение становится доминирующим фактором в формировании асимптотического распределения и найденное в настоящей работе распределение имеет совершенно иной вид, чем в случае  $\alpha > 1$ .

6. Установлено свойство скользящего скейлинга диффузионных процессов, существенно расширяющее область применимости предельных распределений.

## ПУБЛИКАЦИИ

1. V.Uchaikin, I.Yarovikova. Three Models of Nonstationary Transport Theory. // Proceedings of International Conference "Mathematical Modelling of Physical, Economical and Social Processes and Systems" (Ulyanovsk, 1998), p.39.
2. V.Uchaikin, I. Yarovikova, V.Saenko. The moment method as applied to the fractal random walk with finite speed. // 7th Vilnius Conference on Probab. Theory and Mathematical Statistics, 22nd European Meeting of Statisticians (Vilnius,1998), Abstracts of Communications, p.440.
3. Учайкин В.В., Яровикова И.В., Саенко В.В. О телеграфном уравнении в теории переноса. // Ученые записки УлГУ. Сер. физическая, 1999, вып.1(6), с.31-40.
4. Яровикова И.В. Вычисление нестационарных пространственных моментов в обобщенной теории переноса. // Ученые записки УлГУ. Сер. физическая, 2000, вып. 2(9), с.12-18 .
5. Учайкин В.В., Яровикова И.В. Пространственные моменты в нестационарной односкоростной задаче теории переноса с изотропным рассеянием. 1. Точечный мгновенный источник. // Известия ВУЗов. Физика, 2000, №2, с. 88-94.
6. Учайкин В.В., Яровикова И.В., Саенко В.В. Пространственные моменты в нестационарной односкоростной задаче теории переноса с изотропным рассеянием. 2. Плоский мгновенный источник. // Известия ВУЗов. Физика, 2000, №10, с. 71-76.
7. Яровикова И.В. Метод моментов в задачах теории переноса. // Тезисы 7 Международной конференции по фундаментальным наукам «Ломоносов 2000», (Москва, 2000), с. 266.
8. I. Yarovikova. The moment method in generalized transport theory. // International Summer School-Seminar on Recent Problems in Theoretical and Mathematical Physics, (Kazan, 2000), Abstracts of Communications, p.79.
9. I. Yarovikova. The solution of multidimensional non-stationary anomalous diffusion problems in terms of the Laplace transforms. // International Workshop on Chaotic Transport and Complexity, (Universite de Provence, Marseille, 2000), Abstracts of Communications, p.88.
10. Учайкин В.В., Яровикова И.В. Кинетическая модель аномальной диффузии. // Критические технологии и фундаментальные проблемы физики конденсированных сред, Сб. научных трудов под. ред. акад. РАЕН Булярского С.В., Ульяновск, 2001, с.230-265.

---

ЛР №021233 от 23.06.97.  
Подписано в печать 20.11.2001.  
Формат 60х84/16. Усл. печ. л. 1,0.  
Тираж 100 экз. Заказ №134/787

---

Отпечатано с оригинал-макета  
в лаборатории оперативной полиграфии  
Ульяновского государственного университета  
432700, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42

2-